ГОДИШЕН ЗБОРНИК
НА ФИЛОЗОФСКИОТ ФАКУЛТЕТ НА УНИВЕРЗИТЕТОТ ВО СКОПЈЕ
Природно-математички оддел
Книга 3 (1950), № 9

ANNUAIRE
DE LA FACULTÉ DE PHILOSOPHIE DE L'UNIVERSITÉ DE SKOPJE
Section des sciences nâturelles
Tome 3 (1950), № 9

Петар Р. Серафимов

# ПРИЛОЗИ КОН ХИПЕРБОЛИЧНАТА ЛУШПА
(I и II)

Peter R. Serafimow

# BEITRÄGE ZUR HYPERBELSCHALE
(I und II)

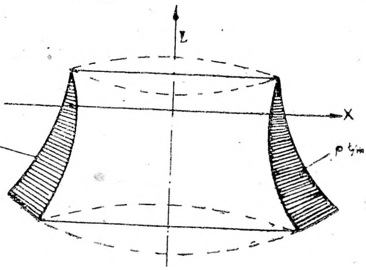
Скопје — Skopje
1950

ПЕТАР Р. СЕРАФИМОВ

# I. ХИДРОСТАТИЧКИ ПРИТИСОК ВО ХИПЕРБОЛИЧНАТА ЛУШПА*)

Хидростатичкиот притисок од внатрешната страна, како што е познато, е управен во правецот на нормалата (сл. 1) и е еднаков на:

$$p_x = 0, \quad p_y = 0, \quad p_z = -\gamma z, \tag{1}$$




Сл. 1

каде е $z$ долбината и за горниот дел од $r_\alpha$ – оската има да произведува затегнување од внатрешната, а за $z$ за долниот дел затегнување од надворешната страна.

Равенките (5), (стр. 8) со оглед на (1) ќе изгледаат:

$$\frac{d}{d\alpha}(N_\alpha r_\alpha) + N_\beta R_\beta \sin\alpha = 0,$$

$$\frac{d}{d\alpha}(N_{\alpha\beta} r_\alpha) - N_{\alpha\beta} R_\beta \sin\alpha = 0, \tag{2}$$

$$N_\beta R_\beta \cos\alpha - N_\alpha r_\alpha - \gamma z r_\alpha R_\beta = 0.$$

Од третата равенка на системот (2) се добива:

---

*) Равенките и односите на кој се позовувам во овој прилог се во претходниот чланак (книга 3, № 8).

$$N_\beta R_\beta = \frac{N_\alpha r_\alpha}{\cos\alpha} + \gamma z \frac{r_\alpha R_з}{\cos\alpha}. \tag{3}$$

Замената на оваа вредност во првата од системот (2) дава:

$$-r_\alpha \frac{dN_\alpha}{d\alpha} - N_\alpha \frac{dr_\alpha}{d\alpha} + N_\alpha r_\alpha \operatorname{tg}\alpha + \gamma z R_\beta r_\alpha \operatorname{tg}\alpha = 0,$$

или:

$$\frac{dN_\alpha}{d\alpha} + N_\alpha \left(\frac{1}{r_\alpha}\frac{dr_\alpha}{d\alpha} - \operatorname{tg}\alpha\right) - \gamma z R_\beta \operatorname{tg}\alpha = 0.$$

За вредностите дадени со (10), (11) и (13) се добива:

$$\frac{dN_\alpha}{d\alpha} + N_\alpha \left(\frac{b^2 \operatorname{tg}\alpha}{a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha} - \operatorname{tg}\alpha\right) - \gamma z \frac{a^2 b^2 \operatorname{tg}\alpha}{(a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha)^{3/2}} = 0. \tag{4}$$

каде уште $z$ треба да се смени од (12), (стр. 10), но тоа ќе го направиме во крајната интеграција при добивањето на општиот интеграл.

Општиот интеграл на равенката (4) е:

$$N_\alpha = -\exp\int\left(\frac{b^2\operatorname{tg}\alpha}{a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha} - \operatorname{tg}\alpha\right)d\alpha$$

$$\left\{C + \int \frac{\gamma z a^2 b^2 \operatorname{tg}\alpha\, d\alpha}{(a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha)^{3/2}} \exp\int\left(\frac{b^2\operatorname{tg}\alpha}{a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha} - \operatorname{tg}\alpha\right)d\alpha\right\}.$$

Експоненцијалните интеграли се израчунати уште порано и затоа може да се пише:

$$N_\alpha = \frac{(a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha)^{1/2}}{\cos^2\alpha}\left\{C + \gamma a^2 b^2 \int \frac{\sin\alpha\cos\alpha\, d\alpha}{(a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha)^2}\right\},$$

или со оглед на (12 стр.):

$$N_\alpha = \frac{a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha)^{1/2}}{\cos^2\alpha}\left\{C + \gamma a^2 b^4 \int \frac{\sin^2\alpha\cos\alpha\, d\alpha}{(a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha)^{5/2}}\right\}. \tag{5}$$

За да се изврши интеграцијата на горниот интеграл треба да се стави $\sin\alpha = t$ и ќе се добије:

$$\int \frac{t^2\,dt}{(a^2 - e^2 t^2)^{5/2}} \tag{6}$$

Како што се гледа од (6) овој интеграл е еден биномен интеграл, од кој кога ќе се изврши интеграцијата ќе се добие:

$$\frac{1}{3a^2}\,\frac{\sin^3\alpha}{(a\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha)^{3/2}},$$

и со оваа вредност ќе имаме:

$$N_\alpha = \frac{\gamma(a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha)^{1/2}}{6\cos^2\alpha}\left\{6C + \frac{2b^4\sin^8\alpha}{(a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha)^{3/2}}\right\}. \tag{7}$$

Ако ова се смени во (3) и со обзир на (10), (11) и (12) стр. (10) се добива:

$$N_\beta = \frac{\gamma(a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha^{3/2}}{6\cos^2\alpha}\left\{6C + \frac{2b^4\sin^3\alpha}{(a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha)^{3/2}}\right\} + \tag{8}$$

$$+\frac{\gamma a^2 b^2\sin\alpha}{a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha}.$$

За смичукето напрегање ќе добиеме, како и при сопствена тежина, бидејќи е $p_x = 0$ вредност еднаква на нула.

Определувањето на константата $C$ ќе стане од условот, да на горниот крај, т. е. за $\alpha = \alpha_0$ е $N_\alpha = 0$. Заменувајќи ги овие услови во (7) се добива:

$$C = \frac{1}{3}\,\frac{b^4\sin^3\alpha_0}{(a^2\cos^2\alpha_0 - b^2\sin^2\alpha_0)^{3/2}}, \tag{9}$$

и со тоа:

$$N_\alpha = \frac{\gamma b^4(a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha)^{1/2}}{3\cos^2\alpha}. \tag{10}$$

$$\cdot\left\{\frac{\sin^8\alpha_0}{(a^2\cos^2\alpha_0 - b^2\sin^2\alpha_0)^{3/2}} + \frac{\sin^8\alpha}{(a^2\cos^2\alpha_0 - b^2\sin^2\alpha_0)^{3/2}}\right\},$$

и

$$(11)\qquad N_\beta = \frac{\gamma\, a^2 b^2 \sin\alpha}{a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha} + \frac{\gamma\, b^2 (a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha)^{3/2}}{3\cos^2\alpha}\cdot$$

$$\cdot\left\{\frac{\sin^3\alpha_0}{(a^2\cos^2\alpha_0 - b^2\sin^2\alpha_0)^{3/2}} + \frac{\sin^3\alpha}{(a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha)^{3/2}}\right\}.$$

Од равенката (11) за $\alpha_0 = 0$ се има:

$$N_\beta = \gamma\,\frac{b^2}{3}\,\frac{\sin^3\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\gamma\, a^2 b^2 \sin\alpha}{a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha},$$

и со оглед на (12), (стр. 10)

$$(12)\qquad N_\beta = \frac{\gamma\, b^2 \sin^3\alpha}{3\cos^2\alpha} + \frac{\gamma\, a^2 z}{(a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha)^{1/2}}.$$

За $\alpha \to 0$ добиваме:

$$N_\beta = \gamma\, a z.$$

Ова покажува дека резултатот се поклопува за цилиндрична лушпа (в. Beyer стр. 760 формула 1154) и спрема тоа, хиперболичната лушпа може да се примени како цилиндрична.

Како пример да земеме една хиперболична лушпа со $r_0 = 5\,m$, $h = 15\,m$, $r_u = 6\,m$. Со овие вредности од:

$$r_\alpha{}^2\, b^2 - z^2 a^2 = a^2 b^2,$$

ќе се има:

$$a = 5\,m, \quad b^2 = \frac{5625}{11}.$$

За $\alpha_0 = 0$ се има една лушпа која е под оската $r_\alpha$. За $N_\alpha$ и $N_\beta$ се добива од (10) и (11):

$$N_\alpha = \gamma\,\frac{b^4}{3}\,\frac{\operatorname{tg}^2\alpha\sin\alpha}{a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha},$$

$$N_\beta = \gamma\,\frac{b^2}{3}\operatorname{tg}^2\alpha\sin\alpha + \gamma\,\frac{a^2 b^2\sin\alpha}{a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha}.$$

Аголот $\alpha$ ќе го добиеме од (во долниот раб):

$$\operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{tg}\gamma = \frac{b^2 r_\alpha}{a^2 z} = -\frac{90}{11},$$

$$\sin\alpha = -\frac{11}{\sqrt{8221}}, \quad \cos\alpha = \frac{90}{\sqrt{8221}}.$$

За $\gamma = 1\, t/m^3$ се добива:

$$N_\alpha = -\frac{5625^2}{3.121}\left(\frac{11}{90}\right)^2 \cdot \frac{11}{\sqrt{8221}} \cdot \frac{1}{25 \cdot \frac{8100}{8221} - \frac{5625}{11} \cdot \frac{121}{8221}} = -1{,}84\ t/m,$$

$$N_\beta = -\frac{5625}{3.11} \cdot \left(\frac{11}{90}\right)^2 \cdot \frac{11}{\sqrt{8221}} - \frac{25.5625.11}{11\sqrt{8221}} \cdot \frac{1}{25\,\frac{8100}{8221} - \frac{5626.11}{8221}} = -90{,}90\ t/m.$$

Ако е цилиндар со радиус $a = r_\alpha = 6\,m$ ќе се добие:

$$N_\beta = 90\, t/m.$$

Како се виѓа, апсолутните вредности доста добро се поклопуваат, но на место затегнување, во хиперболичната лушпа се добива натиск, а затегнување ќе има само на горниот и долниот крај.

---

*P. R. Serafimow*

## HIDROSTATISCHER DRUCK IN DER HYPERBELSCHALE*)

*(Zusammenfassung)*

Wird eine Hyperbelschale als Behälter ausgenützt, wobei $\gamma$ spezifisches Gewicht der Flüssigkeit bedeutet, sind die Belastungskomponenten durch (1) gegeben. Die Differentialgleichungen (5) (s. 10) bekommen die Form (2). Die Elimination von $N_\beta$ bringt uns zur gewöhnlichen Differentialgleichung (4), deren Integral durch (7) wiedergegeben ist. In ähnlicher Weise bekommt man $N_\beta$ (8). Die Beziehung (9) hat uns durch die Bedingung $\alpha = \alpha_0$ und $N_\alpha = 0$ die Integrationskonstante gegeben, die dem oberen Rande entspricht. Im Falle einer Hyperbelschale, die unterhalb der $r_\alpha$ Achse liegt, d. h. für die Randbedingung $\alpha_0 = 0$, gelangt man zu (12). Dieses Integral für $\alpha \to 0$ stimmt mit dem für Zylinderschalen überein. Da in (12) $\sin^3\alpha$ vorkommt, und $\alpha$ ist in diesem Falle stets negativ, und $z$ auch, kann man erkennen. daß $N_\beta$ immer negativ wird, also, unser Behälter ist immer auf Druck beansprucht. Die Zugspannungen treten nur im Fußring und Oberring auf. An Hand eines Beispieles ist dies gezeigt worden

*) Um diesen Aufsatz lesen zu können s. vorherige Arbeit (№ 8).

ПЕТАР Р. СЕРАФИМОВ

# II. ДЕФОРМАЦИИТЕ ЗА ХИПЕРБОЛИЧНАТА ЛУШПА ПРИ РАЗЛИЧНИ СИМЕТРИЧНИ ТОВАРИ

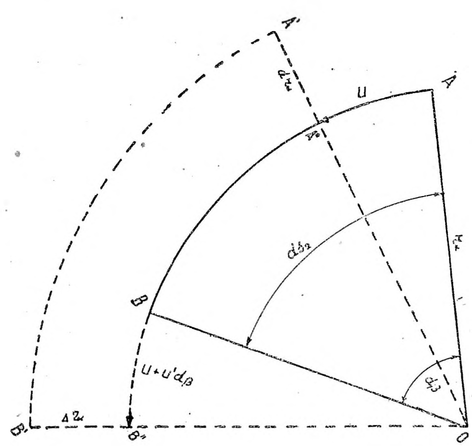
Деформациите што настапуват при товарена лушпа се определуваат од померувањата што ги врши една точка од средната површина на лушпата. Нека се тие померувања $u$, $v$, $w$ во три дадени правци. Од овие померувања можат да се израчунаат дилатациите, а овие од друга страна стојат во врска со внатрешните сили. Померувањата ќе гиземеме како следува:

$u$ во правецот на кругот (пресек нормален на обртната оска).

$v$ во правецот на хиперболата.

$w$ во правецот на радиусот на кривината.

На сл. (1) даден е еден елемент $ds_2$ на кругот. Овој елемент, при деформација, ќе го земе положението $A'B'$. Од сликата се вига дека се:




Сл. 1

$$A'B' = ds_2 + u'\,d\beta\,,$$

$$\text{каде е } u' = \frac{\partial u}{\partial \beta}\cdot$$

$$d\,r_\alpha = w\cos\alpha + v\sin\alpha$$

произлегува од (сл. 2). Прирастот $\Delta ds_2$ може да се смета како разлика меѓу новото положение и старото:

$$\Delta ds_2 = (ds_2 + u'\, d\beta)\left(1 + \frac{w}{r_\alpha}\cos\alpha + \frac{v}{r_\alpha}\sin\alpha\right) - ds_2,$$

или по извршеното умножување и занемарување на бескрајно малите големини од втор ред:

$$\Delta ds_2 = u' d\beta + \frac{ds_2}{r_\alpha}(w\cos\alpha + v\sin\alpha).$$

Дилатацијата ќе биде:

$$\varepsilon_\beta = \frac{\Delta ds_2}{ds_2} = u'\frac{d\beta}{ds_2} + \frac{ds_2}{r_\alpha\, ds_2}(w\cos\alpha + v\sin\alpha).$$

Бидејќи е $ds_2 = r_\alpha\, d\beta$ се добива:

(1) $$\varepsilon_\beta = \frac{u' + w\cos\alpha + v\sin\alpha}{r_\alpha}.$$

Ако се претпостави само ротационо симетричен товар, тогаш е:

$$\frac{\partial u}{\partial\beta} = u' = 0,$$

и за дилатацијата добиваме:

(1') $$\varepsilon_\beta = \frac{w\cos\alpha + v\sin\alpha}{r_\alpha}.$$

Ако се земе ширина на лушпата единица (*m*, или *cm*), тогаш е:

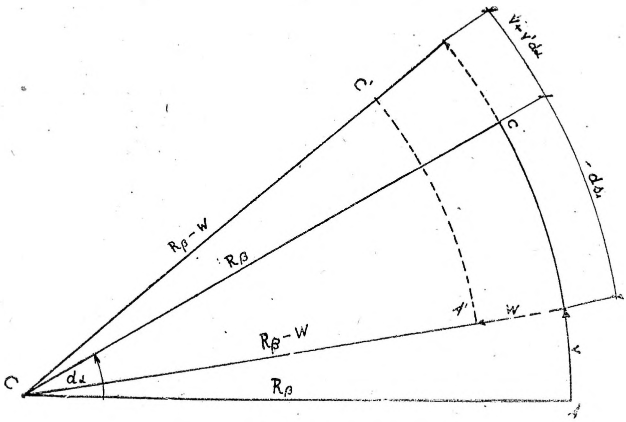
(2) $$\varepsilon_\beta = \frac{1}{Eh}(N_\beta + \eta N_\alpha),$$

каде е $\eta$ реципрочната вредност по Пуасановиот број *m*.

Ако сега земеме еден пресек меѓу хиперболичната лушпа и една равнина која минува низ обртната оска и ги нанесеме соодветните померувања, со оглед на (сл. 2), ќе се има: елементот $AB$ по деформацијата е дојден во $A'C'$.

Лакот негов $de$ е: $de = ds_1 + v'\,d\alpha$ при $v' = \dfrac{\partial v}{\partial \alpha}$, а радиусот на кривината $R_\beta$ ќе се смали на

$$R = R_\beta - w.$$




Сл. 2

Пропорционалното сокра̃тување на лакот ќе биде:

$$(ds_1 + v'\,d\alpha)\,\frac{R_\beta - w}{R_\beta}$$

Прирастот $\Delta\, ds$ од диференцијалниот елемент на лакот ќе биде:

$$\Delta\, ds_1 = (ds_1 + v\,d\alpha)\left(1 - \frac{w}{R_\beta}\right) - ds_1 ,$$

или

$$\Delta\, ds_1 = v\,d\alpha - w\,\frac{ds_1}{R_\beta} - \frac{wv\,d\alpha}{R_\beta},$$

каде последниот член како бескрајно мала големина од втор ред може да се занемари и се добива за дилатацијата:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\Delta\, ds_1}{ds_1} = \frac{v\,d\alpha}{ds_1} - \frac{w}{R_\beta}.$$

Бидејќи е $ds_1 = R_\beta\,d\alpha$ ќе добиеме:

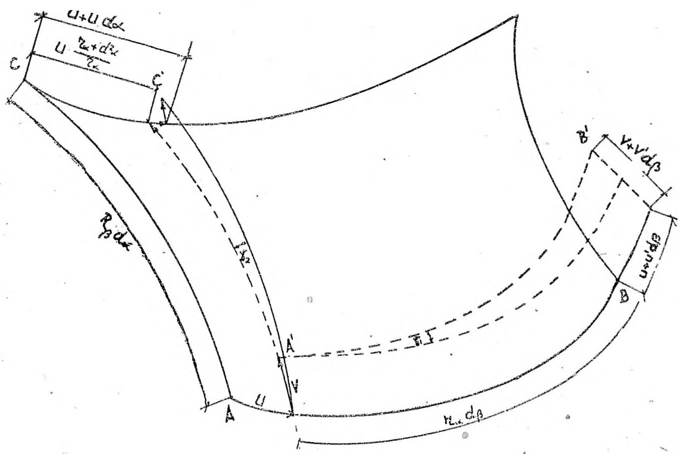
$$\varepsilon_\alpha = \frac{v - w}{R_\beta}. \tag{3}$$

Оваа меридијанска дилатација може да се претстави во функција од силите во пресекот:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{Eh}\,(N_\alpha + \eta\, N_\beta), \tag{4}$$

каде $N_\alpha$, $N_\beta$ и $\eta$ имаат истите значења како и во (2)

За потполно опишување на деформационата состојба, треба да се знае и аголот $\gamma_{\alpha\beta}$ што го заклучуваат тангентите во една точка при недеформирана и деформирана лушпа.




Сл. 3

При деформацијата на лушпата точките $A, B, C$ на еден елемент ќе минат во $A', B', C'$. При тоа, кога $A$ ќе дојде во $A'$ и ќе го измине померувањето $u$, точката $C$ ќе дојде во $C'$ и померувањето ќе биде $u.\dfrac{r_\alpha + dr_\alpha}{r_\alpha}$ бидејќи на $A$ одговара $r_\alpha$ а на $C$ одговара $r_\alpha + dr_\alpha$. Тангентите во $A'$ на недеформираната и деформираната лушпа се разликуваат за

$$\gamma_{\alpha\beta} = \gamma_1 + \gamma_2.$$

Од сликата се виѓа дека се:

$$\gamma_1 = \frac{v'\, d\beta}{r_\alpha\, d\beta + u'\, d\beta} \approx \frac{v'}{r_\alpha},$$

бидејќи е $u' << r_\alpha$;

$$\gamma_2 = \frac{u + u^{\cdot} d\alpha - u\left(1 + \frac{d r_\alpha}{r_\alpha}\right)}{R_\beta \, d\alpha} = \frac{u^{\cdot}}{R_\beta} - \frac{u}{R_\beta} \; \frac{d r_\alpha}{d\alpha}.$$

Но, бидејќи е при хиперболичната обртна лушпа:

$$\frac{d r_\alpha}{d\alpha} = R_\beta \sin\alpha,$$

ќе се има:

$$\gamma_2 = \frac{u^{\cdot}}{R_\beta} - \frac{u \sin\alpha}{r_\alpha}.$$

Со овие вредности за $\gamma_1$ и $\gamma_2$ се добива:

(5) $$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{v'}{r_\alpha} + \frac{u^{\cdot}}{R_\beta} - \frac{u \sin\alpha}{r_\alpha}.$$

Меѓу $\gamma_{\alpha\beta}$ и $N_{\alpha\beta}$ постои познатиот однос:

(6) $$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{2(1-\eta)}{Eh} N_{\alpha\beta}.$$

Равенките (1) — (6) даваат однос меѓу внатрешните сили и померувањата. Внатрешните сили за секој товар можат повеќе познатите односи (в. дисертацијата) да се најдат и ако овде се сменат, ќе се најдат $u$, $v$, $w$.

Со нивната помош можат да се најдат секакви деформации на хиперболичната лушпа и обратно: ако се деформациите дадени, особено кои произлегуваат од условите на краиштата, можат да се најдат внатрешните сили.

За ротационо симетрични товари од (1) и (2) се добива:

(7) $$w \cos\alpha + v \sin\alpha = \frac{r_\alpha}{Eh}(N_\beta + \eta N_\alpha),$$

а од (3) и (4):

(8) $$v^{\cdot} - w = \frac{R_\beta}{Eh}(N_\alpha + \eta N_\beta).$$

Ако (8) се умножи со $\cos\alpha$ и собере со (7) се добива следната линеарна диференцијана равенка:

$$v^{\cdot} + v \operatorname{tg} \alpha = \frac{r_\alpha}{Eh \cos \alpha} (N_\beta + \eta N_\alpha) + \frac{R_\beta}{Eh} (N_\alpha + \eta N_\beta),$$

каде е $v^{\cdot} = \frac{dv}{d\alpha}$. Оваа равенка може да се напише во облик:

$$\frac{dv}{d\alpha} + v \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{Eh} \left[ \frac{r_\alpha}{\cos \alpha} N_\beta + R_\beta N_\alpha + \eta \left( \frac{r_\alpha}{\cos \alpha} N_\alpha + R_\beta N_\beta \right) \right], \tag{9}$$

или:

$$\frac{dv}{d\alpha} + v \operatorname{tg} \alpha = f(\alpha), \tag{10}$$

каде е $f(\alpha)$ десната страна од (9).

При интеграцијата на (10) ќе се добие една интеграциона константа, која може да биде определена од некој услов. $w$ ќе се добие од (7), ако таму се замести $v$ со вредноста најдена од (10).

За несиметрични товари се има еден систем од парцијални диференцијални равенки каде се $u$, $v$, $w$ непознатите функции, а $\alpha$ и $\beta$ независно променљивите. Тоа е проблем кој исто така скоро ќе биде, во една поопширна работа, прикажан.

*P. R. Serafimow*

# VERSCHIEBUNGSKOMPONENTE FÜR HYPERBELSCHALE BEI ROTATIONSSYMETRISCHER BELASTUNG

(*Zusammenfassung*)

Der Verschiebungszustand ist an den Abb. (1) (2) und (3) karrikiert dargestellt. Der Bogen AB (Abb. 1) ist nach der Deformation in die Lage A' B' übergegangen. Unmittelbar aus der (Abb. 1) und mit der Bezeichnung $u' = \frac{\partial u}{\partial \beta}$ kommt man zur Ringdehnung $\varepsilon_\beta$ (1). Bei rotationssymetrischer Belastung ist $u' = 0$ und mit $\varepsilon_\beta$ gelangt man zu (1'). (2) ist eine bekannte Beziehung, wobei $\eta$ Rezibrokwert der Poisson'schen Zahl ist. In ähnlicher Weise gelangt man aus (Abb. 2) zu (3) und (4).

Um die Verdrehung der Tangente zwischen undeformierten und deformierten Zustand der Schale zu bestimmen, greifen wir zur (Abb. 3). Und daraus gelangt man durch kleine Umrechnungen, da $u, \ll r\alpha$ ist, zu (5). (6) ist auch eine bekannte Beziehung. Die Gleichungen (1) bis (6) geben die Beziehungen zwischen den Verschiebungen und inneren Kräften der Schale. Letze e sind schon für verschiedene Belastungsfälle bekannt (s. Dissertation).

Durch Vergleich von (1) mit (2) und (3) mit (4) gelangt man zu den Beziehungen (7) und (8). Durch die Elimination de Versch'ebung und Vereinfachung bekommt man die Differentialgleichung (9) bezw. (10), wobei die rechte Seite der Gleichung (9) bedeutet. Die Integration dieser Differentialgle'chung gibt eine Integrationskonstante, die durch eine Randbedingung ermittelt sein kann. Diese Verschiebungen dienen als Grundlage für die Behandlung der Hyperbelschale nach der Biegesteifetheorie, welche demnächst veröffentlicht wird.